



Teknik Linierisasi untuk Menyelesaikan Persoalan Rantai Suplai Lokasi-Inventori

Rizki Habibi

Departemen Matematika FMIPA USU

Email: pakhabibi@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini membahas masalah manajemen rantai suplai lokasi-inventori dua eselon dengan multi-gudang dan multi-pengecer dimana gudang dan pengecer dapat melakukan penyimpanan (inventori). Masalah aslinya dirumuskan sebagai program tak-linear integer campuran. Optimasi program tak-linier memiliki kompleksitas yang lebih tinggi dan akan dihadapkan dengan beberapa masalah dan tidak mudah untuk diselesaikan, sehingga perlu diubah menjadi fungsi linier menggunakan suatu teknik linierisasi agar dapat diselesaikan dengan algoritma optimasi program linier. Penelitian ini menerapkan teknik linierisasi *piecewise* untuk mengubah program tak-linier integer campuran pada persoalan rantai suplai lokasi-inventori menjadi program linier integer campuran.

Kata kunci: linierisasi, rantai suplai, lokasi-inventori.

Pendahuluan

Dalam persaingan pasar yang semakin kompetitif, menjadi suatu keharusan bagi setiap perusahaan maupun organisasi untuk melakukan efisiensi kinerja dengan mengoptimalkan rantai suplai mereka sehingga dapat membuat biaya menjadi lebih rendah sekaligus juga memberikan kepuasan yang lebih tinggi kepada konsumen. Dalam rangka untuk mengurangi biaya dan meningkatkan layanan, setiap perusahaan maupun organisasi harus mengimplementasikan strategi rantai suplai yang efektif, yaitu strategi yang mempertimbangkan interaksi di tahapan yang berbeda pada rantai suplai.

Manajemen rantai suplai melibatkan beberapa tingkatan keputusan yang harus dibuat, yaitu keputusan strategis, keputusan taktis, dan keputusan operasional. Keputusan tingkat strategis mengacu pada perencanaan yang berdampak pada perusahaan secara keseluruhan selama periode waktu yang lama, seperti misalnya penentuan lokasi gudang (pusat distribusi). Sedangkan

keputusan tingkat taktis memiliki dampak jangka pendek, dan bergantung pada keputusan tingkat strategis, karena mereka menentukan faktor-faktor yang lebih sering, seperti misalnya transportasi dan kebijakan inventori (penyimpanan persediaan). Yang terakhir, keputusan tingkat operasional, dilakukan dalam periode mingguan atau harian untuk merencanakan penjadwalan dan pelaksanaan.

Dalam hal keputusan tingkat strategis, salah satu masalah yang paling penting adalah masalah lokasi fasilitas (gudang). Sementara di antara keputusan tingkat taktis, salah satu yang paling penting adalah masalah kebijakan inventori (penyimpanan persediaan). Masalah-masalah ini saling bergantung, dalam arti: jika dilakukan perubahan pada banyaknya persediaan atau perubahan lokasi gudang maka akan memberi dampak pada biaya persediaan dan perubahan dalam kebijakan inventori berdampak pada keputusan penugasan dan dengan demikian juga mempengaruhi biaya yang terkait dengan lokasi. Akan tetapi, dua masalah ini

biasanya ditangani secara terpisah (*independen*), yang mengarah ke solusi sub-optimal.

Pada penelitian ini, model dasar dari masalah rantai suplai lokasi-inventori yang akan digunakan adalah model yang telah ditunjukkan oleh Diabat *et al.* (2013), yaitu pengiriman satu produk dari pabrik ke gudang, dan dari gudang ke beberapa pengecer. Gudang sebagai pusat distribusi dapat dibuka di beberapa lokasi, yang diputuskan melalui model. Gudang dan pengecer, keduanya memegang tugas inventori (penyimpanan persediaan), yaitu produk yang ada di gudang namun belum diminta oleh pengecer, atau produk yang ada di pengecer namun belum diminta oleh konsumen akhir. Modelnya fokus pada masalah lokasi-inventori dengan multi-eselon, yang menentukan lokasi gudang, di mana satu produk akan didistribusikan dari pabrik sampai ke pengecer. Model menugaskan pengecer melakukan pemesanan ke gudang dan menugaskan gudang melakukan pemesanan ke pabrik, serta menentukan waktu antara setiap pesanan di gudang dan di pengecer dalam rangka meminimalkan biaya operasional dari rantai suplai.

Tujuan dari model ini adalah untuk menentukan nilai optimal dari gudang yang dibuka, permintaan optimal dari pengecer kepada gudang, dan strategi inventori yang optimal pada setiap gudang dan pengecer. Yang menjadi objektifnya adalah untuk meminimalkan pemesanan tetap, inventori (penyimpanan persediaan), transportasi dan biaya terkait fasilitas.

Tinjauan Pustaka

Penelitian-penelitian sebelumnya yang membahas persoalan rantai suplai diantaranya seperti penelitian Shiguemoto dan Armentano (2010) yang menggunakan prosedur *tabu search* dalam menyelesaikan persoalan mengkoordinasi proses produksi, inventori dan distribusi.

Shu (2010) mengembangkan algoritma *greedy*, yang memilih himpunan terbaik di setiap iterasi, sampai semua elemen tertangani oleh himpunan yang dipilih. Seperti juga Diabat (2014) yang menggunakan *simulasi annealing* untuk menemukan penjualan optimal dengan memaksimalkan keuntungan yang fungsi objektifnya dirumuskan dalam bentuk tak-linier pada model persediaan *vendor managed inventory*.

Teo dan Shu (2014) menggunakan *column generation* untuk menyelesaikan masalah desain lokasi-inventori yang dirumuskan sebagai sebuah model pemrograman bilangan bulat himpunan-partisi. Diabat *et al.* (2015) mengembangkan sebuah heuristik berbasis *lagrangian relaxation* yang ditingkatkan. Termasuk juga Kaya dan Urek (2015) juga menawarkan solusi metaheuristic dengan algoritma *simulasi annealing*, *tabu search* dan *algoritma genetika* dalam menyelesaikan persoalan lokasi, inventori dan keputusan harga dalam rantai suplai tertutup yang juga dirumuskan dalam program tak-linier bilangan bulat campuran. Dalam karya Daskin *et al.* (2002) melakukan studi sebuah Model lokasi-inventori atas dasar *pooling-risk*. Masalahnya dirumuskan sebagai program tak-linier bilangan bulat campuran, dan diselesaikan dengan mengusulkan pendekatan berbasis *Lagrangian-relaxation*.

Diabat dan Richard (2015) mengusulkan suatu model yang secara bersamaan membuat keputusan yang berkaitan kebijakan lokasi dan persediaan pada rantai suplai dua eselon, gudang dan pengecer. Hasil penelitian mereka menyimpulkan bahwa algoritma berbasis *lagrangian-relaxation* lebih baik dari pada algoritma *branch-and-bound* konvensional, karena algoritma *branch-and-bound* konvensional hanya cocok pada kasus yang kecil.

Masalah dari perpaduan lokasi dan inventori ada pada model biayanya yang memiliki kompleksitas komputasi yang lebih tinggi. Masalah Awalnya dirumuskan sebagai *mixed integer non-linear program* (MINLP). Dalam banyak aplikasi untuk fungsi tak-linier akan dihadapkan dengan beberapa masalah dan tergolong sulit (Al-Salem *et al.* 2016). Kesulitan yang timbul adalah munculnya persyaratan dan kendala yang berbentuk tak-linear, seperti yang disorot oleh Diabat (2016) sehingga diperlukan teknik linierisasi agar persoalan dapat dinyatakan dalam bentuk linier sehingga dapat diselesaikan dengan algoritma optimasi program linier.

Fungsi linear *piecewise* sering digunakan dalam berbagai aplikasi untuk mendekati hasil dari suatu program tak-linier dengan fungsi tujuan atau kendalanya berbentuk *non-convex* dengan menambahkan variabel biner, variabel kontinyu, dan kendala tambahan. Metode linierisasi *piecewise* dari sebuah fungsi tak-linier telah diusulkan dalam berbagai literatur seperti salah satunya karya Vielma *et al.* (2010).

Mazarei *et al.* (2014) menyimpulkan bahwa linierisasi *piecewise* adalah alat yang efisien untuk mencari solusi perkiraan dan analisis penyelesaian sistem tak-linier, terutama dalam aplikasi dan juga menunjukkan penggunaan linierisasi yaitu pada persoalan fungsi program tak-linier.

Al-Salem *et al.* (2016) membandingkan linierisasi *piecewise* dengan algoritma berbasis *lagrangian-relaxation* untuk menyelesaikan persoalan rantai suplai lokasi-inventori. Melalui analisis komputasi, mereka menunjukkan dengan jelas bahwa pendekatan linierisasi *piecewise* adalah kuat dan dapat diandalkan dalam kasus tertentu dibandingkan pendekatan sebelumnya

yaitu *lagrangian relaxation* berbasis heuristik yang akan gagal untuk memecahkan masalah yang divariasikan atau masalah yang diperbesar.

Selain itu, jumlah tambahan variabel dan kendala yang diperlukan dalam proses linierisasi untuk fungsi tak-linier jelas berdampak pada kinerja komputasi (Lin *et al.* 2013). Al-Salem *et al.* (2016) menyimpulkan bahwa linierisasi *piecewise* lebih efisien pada kendala dan lebih baik pada masalah yang lebih besar. Mereka menunjukkan bahwa pendekatan linierisasi *piecewise* mampu memberikan solusi yang hampir sama tanpa perlu menggunakan algoritma khusus. Dengan keunggulan demikian, maka penelitian ini akan menggunakan teknik linierisasi *piecewise* untuk mengubah problem program tak-linier ke dalam bentuk linier.

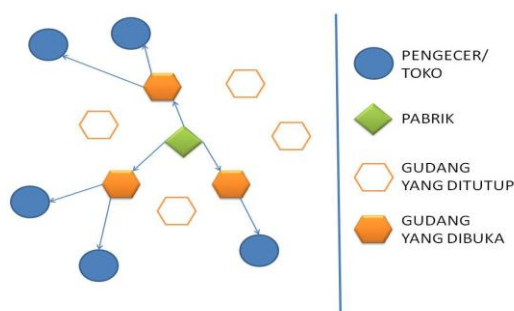
1. Persoalan Rantai Suplai Lokasi-Inventori Multi-eselon

Diberikan satu himpunan pengecer I , dan satu himpunan gudang yang dapat terletak di lokasi tertentu yang telah ditentukan J . Tujuan dari masalah lokasi-inventori multi-eselon adalah untuk mendistribusikan satu produk dari satu pabrik ke gudang J dan selanjutnya dari sana ke pengecer I . Pengecer akan menentukan permintaan dan juga melakukan penyimpanan persediaan, yaitu produk yang telah dipesan dari gudang tapi belum pernah diminta oleh konsumen akhir.

Pada gudang yang bersangkutan, dilakukan pemesanan satu produk dari pabrik di interval waktu yang teratur lalu mendistribusikan produk ke pengecer. Gudang juga melakukan penyimpanan persediaan, yaitu produk yang telah dipesan dari pabrik, tetapi belum pernah diminta oleh pengecer. Dalam model ini, tidak boleh terjadi pasokan antar gudang (suatu gudang memasok ke gudang lain). Jadi produk yang dipasok ke gudang

hanya disediakan oleh pabrik, dan kekurangan tidak diizinkan. Perlu diperhatikan juga, bahwa keberadaan pabrik (unit produksi) tidak menyiratkan model tiga eselon. Sebaliknya, hal ini menunjukkan bahwa biaya pengiriman antara pabrik dan pengecer dicatat, dalam rangka untuk membantu pengambilan keputusan gudang mana yang akan dibuka.

Siklus waktu untuk setiap eselon dihitung sejak pekerjaan dimulai, yaitu saat munculnya sebuah permintaan khusus dan berakhir ketika item siap untuk dikirimkan. Misalnya, siklus waktu untuk distribusi pada gudang dimulai ketika gudang meminta item dari pabrik dan berakhir ketika item ini siap dikirim ke pengecer. Menerapkan kebijakan siklus produksi umum menyiratkan bahwa waktu siklus produksi semua produk adalah sama. Rasio dari siklus waktu yang digunakan (Diabat *et.al* 2013) adalah: $\hat{T}_j/T_{ij} = 2^{N_{ij}}$ Dimana, N_{ij} adalah integer untuk setiap i dan j . \hat{T}_j merupakan waktu antara setiap pesanan yang dilakukan oleh gudang j ke pabrik, dan T_{ij} adalah waktu antara setiap pesanan yang dilakukan oleh pengecer i ke gudang j (dengan asumsi bahwa pengecer i dilayani oleh gudang j), dan diasumsikan bahwa \hat{T}_j dan T_{ij} diketahui.



Gambar 1. Ilustrasi Jaringan Rantai Suplai Lokasi-Inventori Multi-eselon.

Untuk biaya yang bersangkutan, kita dapat mengidentifikasi komponen utama biaya sebagai berikut: (i) biaya

pemesanan, yaitu biaya setiap melakukan pesanan, (ii) biaya penyimpanan persediaan, yaitu biaya penyimpanan satu unit produk untuk satu unit waktu, (iii) biaya pengiriman per unit, yaitu biaya pengiriman satu unit produk antar fasilitas, dan (iv) biaya membuka lokasi gudang, yaitu biaya pembangunan dan operasi gudang. Tujuan model adalah memutuskan berapa jumlah gudang yang harus dibuka, lokasi gudang tersebut, himpunan pengecer yang ditugaskan untuk masing-masing gudang dan akhirnya ukuran pesanan dan waktu pesanan untuk setiap fasilitas (setiap gudang dan pengecer), dengan tujuan meminimalkan jumlah persediaan, pengiriman, pemesanan, dan biaya membuka lokasi dan harus memuaskan permintaan konsumen akhir.

2. Model Rantai Suplai Lokasi-Inventori Satu Gudang Multi Pengecer

Sebelum memperkenalkan model multi-gudang multi-pengecer, kita akan membahas model satu-gudang multi-pengecer. Model ini terdiri dari sistem distribusi dengan satu gudang yang bertanggung jawab menyediakan satu produk untuk pengecer. Permintaan dari masing-masing pengecer adalah diketahui dan harus dipenuhi. Gudang menerima perintah (permintaan) dari pengecer, sementara gudang memberikan perintah (permintaan) dari pabrik. Biaya yang muncul adalah biaya tetap setiap kali pesanan diterima dan juga biaya penyimpanan persediaan. Keduanya tergantung fasilitas. Tujuannya adalah untuk memutuskan berapa lama kurun waktu dan kuantitas permintaan pengecer dan strategi penyimpanan persediaan di gudang, untuk meminimalkan total biaya. Notasi yang digunakan disajikan sebagai berikut:

Himpunan*I* : himpunan pengecer, dengan indeks *i*.**Parameter***d_i* : besar permintaan dari pengecer *i*.*s_i* : biaya pengiriman per unit dari gudang ke pengecer *i*.*h_i* : biaya penyimpanan per unit barang di pengecer *i* dalam 1 waktu.*k_i* : biaya tetap pemesanan oleh pengecer *i*.*h₀* : biaya penyimpanan per unit barang di gudang dalam 1 waktu.**Variabel Keputusan:***T_i* : waktu untuk satu putaran pemesanan di pengecer *i*.*T₀* : waktu untuk satu putaran pemesanan di gudang.

Untuk menentukan biaya penyimpanan persediaan, sistem penyimpanan persediaan di pengecer *i* didefinisikan sebagai persediaan yang disimpan di pengecer *i* ditambah persediaan yang tersimpan di gudang yang akan dikirim ke pengecer *i*. Kemudian, tarif biaya penyimpanan di gudang akan menjadi $\hat{h}_0' = \hat{h}_0$ dan tarif biaya penyimpanan di pengecer *i* akan menjadi $h_i' = h_i - \hat{h}_0$, yang pada dasarnya berarti bahwa untuk biaya pada setiap eselon kita perlu mengurangkannya dengan biaya dari eselon yang sebelumnya.

Ada dua kasus yang harus dipertimbangkan pada saat ini:

1. $T_i \geq T_0$. Dalam hal ini, gudang memenuhi (mengirimkan) pesanan ke pengecer *I* setiap kali mendapatkan barang dari pabrik. Dengan demikian, gudang tersebut tidak memiliki persediaan yang tersimpan untuk pengecer tertentu (sehingga $\hat{h}_0 = 0$). Selanjutnya akan ditentukan biaya penyimpanan persediaan dan pemesanan di pengecer *i*. Misalkan Q_i adalah kuantitas pesanan untuk pengecer *i* dan T_i adalah waktu untuk satu putaran pemesanan pada pengecer

i. Tingkat persediaan rata-rata di pengecer *i* adalah $\frac{1}{2}T_i$, dibagi dengan panjang siklus pesanan T_i , atau $\frac{1}{2}Q_i$. Karena setiap hari permintaan d_i tetap, maka $Q_i = d_i \cdot T_i$. Sehingga tingkat persediaan rata-rata di pengecer *i* adalah :

$$\frac{1}{2}Q_i = \frac{1}{2}d_i \cdot T_{ij} \quad (1)$$

Maka biaya rata-rata penyimpanan persediaan di pengecer *i* selama periode perencanaan dasar dengan biaya penyimpanan per unit per hari, h_i , adalah sebagai berikut:

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}(h_i' + \hat{h}_0) \cdot d_i \cdot T_i \quad (2)$$

dengan $\hat{h}_0 = 0$, diperoleh:

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}h_i \cdot d_i \cdot T_i \quad (3)$$

2. $T_i < T_0$. Dalam hal ini, ada sebagian barang dari persediaan yang ada di gudang dan tersimpan, menunggu untuk pengiriman ke pengecer *i*. Mengingat bahwa tarif biaya penyimpanan persediaan di pengecer *i* adalah h_i' dan tarif biaya penyimpanan persediaan di gudang adalah \hat{h}_0' , maka diperoleh:

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}\hat{h}_0' \cdot d_i \cdot T_0 \quad (4)$$

Untuk (2.3) kita harus menambahkan biaya penyimpanan persediaan di pengecer *i*, yang dihitung sebagaimana kasus 1, digunakan tarif biaya penyimpanan persediaan per-unit di pengecer *i*, yaitu h_i' , sehingga didapatkan:

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}(h_i' + \hat{h}_0) \cdot d_i \cdot T_i \quad (5)$$

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}h_i \cdot d_i \cdot T_i + \frac{1}{2}\hat{h}_0' \cdot d_i \cdot T_i \quad (6)$$

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2}h_i \cdot d_i \cdot T_i \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{2} \hat{h}'_0 \cdot d_i \cdot \max(T_0, T_i)$$

Oleh karena itu, biaya rata-rata dapat disajikan sebagai:

$$H_i(T_0, T_i) = \sum_i \frac{k_i}{T_i} + \sum_i H_i(T_0, T_i) \quad (8)$$

Dengan demikian, biaya rata-rata penyimpanan persediaan untuk pengecer i yang ada di gudang dan di pengecer i yang disimbolkan dengan $H_i(T_0, T_i)$ dirumuskan dengan:

$$H_i(T_0, T_i) = \frac{1}{2} (h_i - \hat{h}_0) \cdot d_i \cdot T_i + \frac{1}{2} \hat{h}_0 \cdot d_i \cdot \max(T_0, T_i) \quad (9)$$

Dimana:

$$T_0/T_i = 2^{N_i} \quad \forall i \in I \quad (10)$$

$$N_i \in Z \quad \forall i \in I \quad (11)$$

$$T_0 > 0 \quad (12)$$

$$T_1 > 0 \quad \forall i \in I \quad (13)$$

Kendala (10) sesuai dengan kebijakan 2^{N_i} , yang berarti bahwa rasio dari waktu siklus di gudang dan di setiap pengecer akan menjadi 2^{N_i} . Kendala (11) memastikan bahwa N_i adalah bilangan integer, sedangkan kendala (12) dan (13) menjamin waktu siklus harus positif.

3. Model Rantai Suplai Lokasi-Inventori Multi-Gudang dan Multi Pengecer

Sekarang masalah sebelumnya dapat diperluas sekaligus memperkenalkan masalah yang dibahas dalam penelitian ini, yaitu masalah multi-gudang multi-pengecer. Dalam masalah ini, ada sejumlah gudang yang dapat dibuka di sejumlah kandidat lokasi. Dengan demikian, kita memiliki dua keputusan tambahan yang harus dibuat. Keputusan pertama adalah dilokasi mana gudang akan dibuka. Keputusan yang kedua adalah

(karena sekarang ada lebih dari satu gudang) pengecer yang manakah yang akan dipasok oleh setiap gudang yang dibuka. Notasi berikut digunakan untuk formulasi.

Himpunan
 I : himpunan pengecer, dengan indeks i .
 J : himpunan lokasi gudang yang mungkin dibuka, dengan indeks j .

Parameter
 d_i : besar permintaan dari pengecer i .
 f_j : biaya tetap pembangunan dan pengoperasian gudang pada lokasi j .
 \hat{k}_j : biaya tetap pemesanan pada gudang j .
 s_{ij} : biaya pengiriman per unit dari gudang j ke pengecer i .
 \hat{s}_j : biaya pengiriman per unit dari pabrik ke gudang j .
 h_i : biaya penyimpanan per unit barang di pengecer i dalam 1 waktu.
 k_i : biaya tetap pemesanan oleh pengecer i .
 \hat{h}_j : biaya penyimpanan persediaan per unit dalam satu waktu di gudang j .

Variabel Keputusan:
 T_{ij} : waktu putaran pada pengecer i ketika dipasok oleh gudang j .
 \hat{T}_j : waktu putaran pada gudang j .

Variabel Keputusan Biner
 $X_j = \begin{cases} 1 & \text{jika suatu gudang di buka di lokasi } j \\ 0 & \text{jika sebaliknya} \end{cases}$
 $Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika pengecer } i \text{ di pasok gudang } j \\ 0 & \text{jika sebaliknya} \end{cases}$

Berdasarkan permasalahan sebelumnya, kita dapat memperoleh biaya rata-rata dengan menambahkan pertimbangan biaya-tetap-pemesanan di gudang j , serta variabel biner yang memutuskan apakah sebuah gudang akan dibuka atau tidak pada lokasi yang

diberikan dan apakah pengecer akan dipasok oleh gudang yang diberikan (dibuka). Maka didapatkan bentuk final dari biaya, yaitu:

$$\sum_j \frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} X_j + \sum_i \sum_j \frac{k_j}{T_{ij}} Y_{ij} + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} [(h_i - \hat{h}_j) T_{ij} + \hat{h}_j \max(\hat{T}_j, T_{ij})] d_i Y_{ij} \quad (14)$$

Selain biaya ini, ada juga biaya tetap pendirian gudang, yaitu:

$$\sum_j f_j X_j \quad (15)$$

Terakhir, ada biaya pengiriman antara gudang dan pengecer yang ditugaskan:

$$\sum_i \sum_j (s_{ij} + \hat{s}_j) d_i Y_{ij} \quad (16)$$

Sekarang dapat disajikan rumusan dari masalah rantai suplai lokasi-inventori:

$$\min_{X,Y,\hat{T},T} \sum_j f_j X_j + \sum_j \frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} X_j + \sum_i \sum_j (s_{ij} + \hat{s}_j) d_i Y_{ij} + \sum_i \sum_j \frac{k_j}{T_{ij}} Y_{ij} + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} [(h_i - \hat{h}_j) T_{ij} + \hat{h}_j \max(\hat{T}_j, T_{ij})] d_i Y_{ij} \quad (17)$$

Dengan :

$$(s_{ij} + \hat{s}_j) d_i = b_{ij} \quad (18)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2} (h_i - \hat{h}_j) d_i \quad (19)$$

$$\text{dan } e_{ij} = \frac{1}{2} \hat{h}_j d_i \quad (20)$$

maka:

$$\min_{X,Y,\hat{T},T} \sum_j f_j X_j + \sum_j \frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} X_j + \sum_i \sum_j b_{ij} Y_{ij} + \sum_i \sum_j \frac{k_j}{T_{ij}} Y_{ij} + \sum_i \sum_j e_{ij} \max(\hat{T}_j, T_{ij}) Y_{ij} \quad (21)$$

Dan disederhanakan menjadi:

$$\min_{X,Y,\hat{T},T} \sum_j \left(f_j + \frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} \right) X_j + \sum_i \sum_j \left\{ \frac{k_i}{T_{ij}} + b_{ij} + c_{ij} T_{ij} + e_{ij} \max(\hat{T}_j, T_{ij}) \right\} Y_{ij} \quad (22)$$

Dimana:

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (23)$$

$$Y_{ij} \leq X_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (24)$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \quad (25)$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \quad (26)$$

$$N_{ij} \in Z \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (27)$$

$$\hat{T}_j > 0 \quad \forall j \in J \quad (28)$$

$$T_{ij} > 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (29)$$

Fungsi objektif, seperti yang sudah dijelaskan, bertujuan untuk meminimalkan jumlah persediaan, pengiriman, pemesanan serta biaya lokasi, sementara pada saat yang sama harus memenuhi permintaan konsumen akhir. Himpunan pertama pada kendala (23) menjelaskan bahwa setiap pengecer ditugaskan untuk tepat satu gudang. Kendala (24) memastikan bahwa pengecer tidak akan dipasok oleh gudang yang tidak dibuka, sedangkan kendala (28) dan (29) memastikan siklus waktu positif.

4. Linierisasi

Fungsi tujuan dari persoalan rantai suplai lokasi-inventori dirumuskan sebagai program *non-linier integer* campuran (MINLP) yang dapat disajikan dalam model berikut:

$$\min_{X,Y,\hat{T},T} \sum_j f_j X_j + \underbrace{\sum_j \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} \right) X_j}_1 + \underbrace{\sum_i \sum_j \left(\frac{k_i}{T_{ij}} \right) Y_{ij}}_2 + \underbrace{\sum_i \sum_j b_{ij} Y_{ij}}_3 + \underbrace{\sum_i \sum_j c_{ij} T_{ij} Y_{ij}}_4 + \underbrace{\sum_i \sum_j e_{ij} \max(\hat{T}_j, T_{ij}) Y_{ij}}_5 \quad (30)$$

Pada fungsi tujuan (30) dapat ditemukan bentuk tak-linier sebagaimana yang sudah diberi tanda nomor, yaitu: $\left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j}\right)X_j$, $\left(\frac{k_i}{T_{ij}}\right)Y_{ij}$, $c_{ij}T_{ij}Y_{ij}$, dan $e_{ij}\max(\hat{T}_j, T_{ij})Y_{ij}$. Selanjutnya akan dilakukan proses linierisasi elemen tak-linier yang terdapat dalam fungsi (30) untuk memformulasikan suatu rumusan yang lebih mudah untuk diselesaikan. Untuk mengatasi masalah ketak-linieran yang timbul pada fungsi tujuan tersebut akan diterapkan linierisasi *piecewise*, seperti yang dilakukan oleh Al-Salem *et al.* (2016).

Langkah awal adalah melinierkan bentuk tak-linier bagian-1 berdasarkan linierisasi *piecewise* dari bentuk $\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j}$. Diasumsikan \hat{T}_j dibagi menjadi $n = 1, 2, \dots, N$ bagian yang linier, sehingga terdapat $N+1$ titik belah yang dilambangkan sebagai $t_j^1, t_j^2, \dots, t_j^{N+1}$ dengan $t_j^1 < t_j^2 < \dots < t_j^{N+1}$.

Dimana:

$$P_j^n \in [0,1] \quad (31)$$

$$\sum P_j^n = 1 \quad (32)$$

$$P_j^n \geq 0 \quad (33)$$

Maka selanjutnya dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut:

$$\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} \cong \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} P_j^n + \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} (1 - P_j^n) \quad (34)$$

$$\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} \cong \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} P_j^n + \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} P_j^n \quad (35)$$

$$\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} \cong \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} + \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} \right) P_j^n \quad (36)$$

Kemudian (36) dikalikan dengan X_j menjadi:

$$\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} X_j \cong \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} X_j + \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} \right) P_j^n X_j \quad (37)$$

$$\text{Dengan: } X_j \in \{0,1\}, \forall j \in J \quad (38)$$

Kemudian dibuat variabel pelinier yang baru yaitu $A_j^n = P_j^n X_j$, dengan ketentuan:

$$A_j^n \leq P_j^n \quad (39)$$

$$A_j^n \geq P_j^n + M(X_j - 1) \quad (40)$$

dimana M adalah sembarang angka yang besar.

$$A_j^n \leq M X_j \quad (41)$$

Maka diperoleh bentuk liniernya yaitu:

$$\frac{\hat{k}_j}{\hat{T}_j} X_j \cong \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} X_j + \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} \right) A_j^n \quad (42)$$

Dengan kendala (31), (32), (33), (38), (39), (40) dan (41). Selanjutnya akan dilinierkan bentuk tak-linier bagian-2, yaitu $\left(\frac{k_i}{T_{ij}}\right)Y_{ij}$ berdasarkan linierisasi *piecewise* dari bentuk $\frac{k_i}{T_{ij}}$. Diasumsikan T_{ij} dibagi menjadi $n = 1, \dots, N$ bagian yang linier, sehingga terdapat $N+1$ titik belah yang dilambangkan sebagai $t_{ij}^1, t_{ij}^2, \dots, t_{ij}^{N+1}$ dan $t_{ij}^1 < t_{ij}^2 < \dots < t_{ij}^{N+1}$.

Dengan:

$$Q_{ij}^n \in [0,1], \forall i \in I, \forall j \in J \quad (43)$$

$$\sum_n Q_{ij}^n = 1 \quad (44)$$

$$Q_{ij}^n \geq 0 \quad (45)$$

Kemudian dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut:

$$\frac{k_i}{T_{ij}} \cong \frac{k_i}{t_{ij}^n} Q_{ij}^n + \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} (1 - Q_{ij}^n) \quad (46)$$

$$\frac{k_i}{T_{ij}} \cong \frac{k_i}{t_{ij}^n} Q_{ij}^n + \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} Q_{ij}^n \quad (47)$$

$$\frac{k_i}{T_{ij}} \cong \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} + \left(\frac{k_i}{t_{ij}^n} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} \right) Q_{ij}^n \quad (48)$$

Dengan mengalikan (48) dengan Y_{ij} menjadi:

$$\frac{k_i}{T_{ij}} Y_{ij} \cong \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} Y_{ij} + \left(\frac{k_i}{t_{ij}^n} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} \right) Q_{ij}^n Y_{ij} \quad (49)$$

$$\text{Dengan: } Y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in I, \forall j \in J \quad (50)$$

Kemudian dibuat variabel pelinier yang baru yaitu $B_{ij}^n = Q_{ij}^n Y_{ij}$, dengan ketentuan:

$$B_{ij}^n \leq Q_{ij}^n \quad (51)$$

$$B_{ij}^n \geq Q_{ij}^n + M(Y_{ij} - 1) \quad (52)$$

$$B_{ij}^n \leq M Y_{ij} \quad (53)$$

Maka diperoleh bentuk liniernya yaitu:

$$\frac{k_i}{T_{ij}} Y_{ij} \cong \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} Y_{ij} + \left(\frac{k_i}{t_{ij}^n} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} \right) B_{ij}^n \quad (54)$$

Dengan kendala (43), (44), (45), (51), (52) dan (53).

Selanjutnya akan dilinierkan bentuk tak-linier bagian 3, yaitu bentuk $c_{ij} T_{ij} Y_{ij}$ dimana:

$$Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (55)$$

$$T_{ij} \geq 0 \quad (56)$$

Dengan membuat variabel pelinier yang baru yaitu $C_{ij} = T_{ij} Y_{ij}$, sehingga diperoleh bentuk:

$$c_{ij} T_{ij} Y_{ij} = c_{ij} C_{ij} \quad (57)$$

dengan ketentuan:

$$C_{ij} \leq T_{ij} \quad (58)$$

$$C_{ij} \geq T_{ij} + M(Y_{ij} - 1) \quad (59)$$

$$C_{ij} \leq M Y_{ij} \quad (60)$$

Selanjutnya akan dilinierkan bentuk tak-linier bagian 4, yaitu bentuk $e_{ij} \max(\hat{T}_j, T_{ij}) Y_{ij}$ ngan menyatakan bentuk $\max(\hat{T}_j, T_{ij})$ agai w_{ij} yaitu:

$$w_{ij} = \max(\hat{T}_j, T_{ij}) \quad (61)$$

Sehingga diperoleh:

$$e_{ij} \max(\hat{T}_j, T_{ij}) Y_{ij} = e_{ij} w_{ij} Y_{ij} \quad (62)$$

Dengan batasan:

$$w_{ij} \geq \hat{T}_j \quad (63)$$

$$w_{ij} \geq T_{ij} \quad (64)$$

Dengan membuat variabel pelinier yang baru yaitu $E_{ij} = w_{ij} Y_{ij}$, maka diperoleh bentuk:

$$e_{ij} w_{ij} Y_{ij} = e_{ij} E_{ij} \quad (65)$$

Dengan ketentuan:

$$E_{ij} \leq W_{ij} \quad (66)$$

$$E_{ij} \geq W_{ij} + M(Y_{ij} - 1) \quad (67)$$

$$E_{ij} \leq M Y_{ij} \quad (68)$$

$$W_{ij} \geq \hat{T}_j \quad (69)$$

$$W_{ij} \geq T_{ij} \quad (70)$$

$$\hat{T}_j, T_{ij} \geq 0 \quad (71)$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (72)$$

Jika bentuk (42), (54), (57) dan (65) dituliskan bersamaan sekaligus sesuai model (30) maka diperoleh model program linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \min_{X,Y,\hat{T},T} \quad & \sum_j f_j X_j \\ & + \sum_j \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} X_j \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} \right) A_j^n \right) \\ & + \sum_i \sum_j \left(\frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} Y_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{k_i}{t_{ij}^n} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} \right) B_{ij}^n \right) \\ & + \sum_i \sum_j b_{ij} Y_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij} C_{ij} \\ & + \sum_i \sum_j e_{ij} E_{ij} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_j f_j X_j + \sum_j \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} X_j \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^n} - \frac{\hat{k}_j}{\hat{t}_j^{n+1}} \right) A_j^n \right) \\ & + \sum_i \sum_j \left(\frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} Y_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{k_i}{t_{ij}^n} - \frac{k_i}{t_{ij}^{n+1}} \right) B_{ij}^n \right. \\ & \quad \left. + b_{ij} Y_{ij} + c_{ij} C_{ij} \right. \\ & \quad \left. + e_{ij} E_{ij} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

5. Analisis Perhitungan

Bagian ini akan menjelaskan teknis dari masalah yang diselesaikan dengan membahas sebuah contoh. Parameter yang menjadi masukan untuk contoh ini

disajikan dalam tabel 1, tabel 2 dan tabel 3 dengan ukuran masalah yang kecil yaitu masalah rantai suplai dengan jumlah calon gudang yang dapat dibuka sebanyak 3 gudang ($J = 3$) dan akan mensuplai 3 pengecer ($I = 3$) yang diilustrasikan dengan gambar 2. Tabel 1 menyajikan masukan berupa biaya berkenaan dengan pembukaan suatu gudang j , diantaranya: biaya pembukaan setiap gudang j (f_j), biaya ongkos kirim satuan barang dari pabrik ke gudang j (\hat{s}_j), biaya inventori di gudang j (\hat{h}_j) dan biaya tetap pemesanan gudang j (\hat{k}_j).

Tabel 2 menyajikan masukan berupa biaya berkenaan dengan masing-masing pengecer i , yaitu: jumlah permintaan pengecer i (d_i), biaya inventori di pengecer i (h_i) dan biaya tetap pemesanan masing-masing pengecer i (k_i). Tabel 3 menyajikan biaya pengiriman satuan barang dari gudang j ke pengecer i (s_{ij}).

Selanjutnya perhitungan dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan interval nilai T yang akan dibagi ke dalam segmen-segmen, yang dimisalkan berada pada interval $0.1 < T < 1$, dengan nilai P yang digunakan adalah 0.5. Kemudian diasumsikan T dibagi menjadi N bagian (segmen) yang linier dan lebar interval setiap segmen sama, sehingga terdapat $N + 1$ titik belah yang dilambangkan sebagai $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ dimana $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$.

Tabel 1. Biaya Berkenaan dengan Gudang j

	f_j	\hat{s}_j	\hat{h}_j	\hat{k}_j
J=1	25000	2000	500	50000
J=2	50000	1000	800	75000
J=3	55000	500	1000	100000

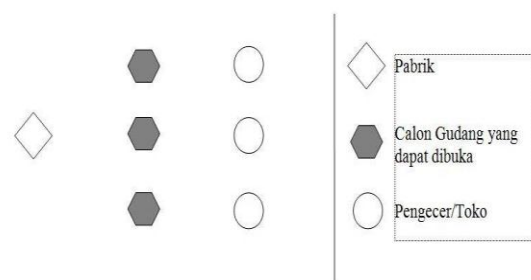
Tabel 2: Biaya Berkenaan dengan Pengecer i

	$I=1$	$I=2$	$I=3$
d_i	100	150	200
h_i	1000	1200	1500

k_i	80000	90000	80000
-------	-------	-------	-------

Tabel 3. Biaya Pengiriman Satuan Barang (s_{ij}) dari Gudang j ke Pengecer i

	$I=1$	$I=2$	$I=3$
J=1	2000	500	1200
J=2	1700	800	1000
J=3	1500	2000	2000



Gambar 2 : Ilustrasi Rantai Suplai Lokasi-Inventori dengan 3 gudang dan 3 pengecer

Tabel 4 merangkum hasil perhitungan berupa total biaya minimum beserta perbedaannya atau errornya dari berbagai jumlah segmen dari 1 sampai 5. Hal ini memungkinkan untuk dapat mengamati bahwa perbedaan yang besar dalam error ada di 1 segmen linear, sementara itu secara bertahap berkurang pada pendekatan 2 segmen, 3 segmen sampai 5 segmen.

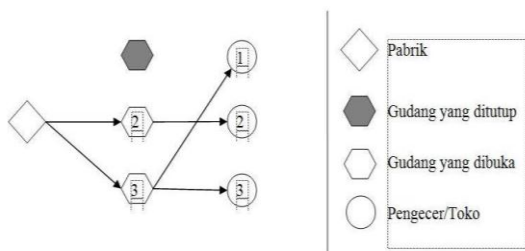
Tabel 4. Rangkuman Hasil Perhitungan

	1 Segm	2 Segm	3 Segm	4 Segm	5 Segm
Min Biaya	3343500	1924900	1800300	1763600	1754400
Error	849650	48101	23978	18927	17125

Dengan membandingkan hasil yang diperoleh, penulis mencatat bahwa dengan menambahkan jumlah segmen dapat mengurangi kesenjangan error yang dihasilkan. Tetapi upaya perhitungan untuk segmen yang lebih banyak, seperti 4 segmen dan 5 segmen secara substansial memang lebih tinggi.

Pada linierisasi dengan 5 segmen linier, dimana terdapat 6 titik belah $t = \{0.1, 0.28, 0.46, 0.64, 0.82, 1\}$, yang garis liniernya ditunjukkan gambar 3.10, jika interval segmen garis linier yang pertama yaitu $0.28 < t < 0.46$, diperkecil dengan menggeser titik belah $t_3 = 0.46$ ke kiri menjadi $t_3 = 0.37$ sehingga himpunan titik belahnya menjadi $t = \{0.1, 0.28, 0.37, 0.64, 0.82, 1\}$. Setelah dilakukan perhitungan diperoleh nilai mini-mum yang sama dengan sebelum pergeseran titik belah yaitu 1.754.400, tetapi memiliki nilai error yang lebih kecil dari sebelumnya 17.125 menjadi 8.339,3. Kemudian konsekuensi penggeseran titik belah t_3 ke kiri menyebabkan error dari interval sebelah kirinya berkurang, sedangkan error interval sebelah kanannya bertambah. Jika penggeseran titik belah t_3 terlalu jauh ke kiri, maka error dari interval sebelah kanan menjadi cukup besar yang menyebabkan error hasil perhitungan akhirnya kembali menjadi lebih besar.

Hal ini mengindikasikan perlukannya perhitungan khusus untuk mendapatkan posisi titik belah yang memiliki error yang merata disetiap interval segmen-segmennya yang diperkirakan dapat memberikan hasil pendekatan yang lebih optimal.



Gambar 3. Keputusan Gudang yang dibuka dan memasok pengecer

Kesimpulan

Penelitian ini membahas persoalan rantai suplai lokasi-inventori dua eselon dengan beberapa gudang (multi-gudang)

dan beberapa pengecer (multi-pengecer) dimana gudang dan pengecer dapat melakukan penyimpanan (inventori). Model dari persoalan rantai suplai lokasi-inventori aslinya diformulasikan dalam bentuk program tak-linier integer campuran. Penelitian ini mengimplementasikan teknik linierisasi *piecewise* dalam mengubah persoalan tak linier menjadi persoalan optimasi linier.

Dengan adanya linierisasi, penyelesaian persoalan rantai suplai menjadi mudah dilakukan dan kendala yang dihasilkan tidak terlalu banyak. Namun, dari hasil perhitungan, error yang dihasilkan masih terlalu besar, terutama linierisasi dengan segmen linier yang sedikit. Sementara itu secara bertahap error berkurang untuk segmen yang lebih banyak, tetapi upaya perhitungan untuk segmen yang banyak secara substansial memang lebih tinggi dan membutuhkan waktu perhitungan yang lebih lama. Perubahan posisi titik belah bagian yang linier juga mempengaruhi ukuran error yang dihasilkan. Hal ini mengindikasikan bahwa untuk mendapatkan hasil linierisasi *piecewise* yang lebih baik (lebih mendekati nilai aslinya) maka diperlukan penentuan titik belah dengan nilai error yang merata pada setiap segmen liniernya.

Daftar Pustaka

- Al-Salem, M., Diabat, A., Dalalah, D., dan Alrefaei, M. 2016. A Closed-Loop Supply Chain Management Problem: Reformulation and Piecewise Linearization. *Journal of Manufacturing Systems*, 40, 1-8.
- Daskin, M. S., Coullard, C. R., dan Shen, Z.-J. M. 2002. An inventory-location model: Formulation, solution algorithm and computational results. *Annals of Operations Research*, 110(1-4), 83-106.

- Diabat, A. 2014. Hybrid Algorithm For A Vendor Managed Inventory System In A Two-Echelon Supply Chain. *European Journal of Operational Research*, 238 (1), 114-121.
- Diabat, A. 2016. Capacitated Facility Location And Inventory Management Problem With Single Sourcing. *Opt Lett*.
- Diabat, A., Battaa, O., dan Nazzal, D. 2015. An Improved Lagrangian Relaxation-Based Heuristic For A Joint Location Inventory Problem. *Computers and Operations Research*, 61(1), 170-178.
- Diabat, A. dan Richard, J. P. 2015. An Integrated Supply Chain Problem: A Nested Lagrangian Relaxation Approach. *Annals of Operations Research*, 229 (1), 303-323.
- Diabat, A., Richard, J. P., dan Codrington, C. W. 2013. A Lagrangian Relaxation Approach To Simultaneous Strategic And Tactical Planning In Supply Chain Design. *Annals of Operations Research*, 203(1), 55-80.
- Kaya, O., dan Urek, B. 2016. A Mixed Integer Nonlinear Programming Model And Heuristic Solutions For Location, Inventory And Pricing Decisions In A Closed Loop Supply Chain. *Computers and Operations Research*, 65, 93-103.
- Mazarei, M. M., Behroozpoor, A. A., dan Kamyad, A. V., 2014. The Best Piecewise Linearization of Nonlinear Functions. *Applied Mathematics*, 5, 3270-3276.
- Shiguemoto, A. L., dan Armentano, V. A. 2010. A Tabu Search Procedure For Coordinating Production, Inventory And Distribution Routing Problems. *International Transactions in Operational Research*, 17(2), 179-195.
- Shu, J. 2010. An efficient greedy heuristic for warehouse-retailer network design optimization. *Transportation Science*, 44(2), 183-192.
- Teo, C. P., dan Shu, J. 2004. Warehouse-Retailer Network Design Problem. *Operations Research*, 52(3), 396-408.
- Vielma, J. P., Ahmed, S., dan Nemhauser, G. 2010. A Note On A Superior Representation Method For Piecewise Linear Functions. *INFORMS Journal on Computing*. Vol. 22, No. 3, 493-497.